

CHƯƠNG 4: ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA HÌNH PHẪNG

3.1. Khái niệm.

3.2. Mô men tĩnh của hình phẳng.

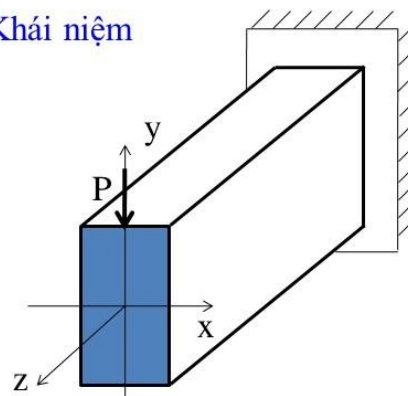
3.3. Mô men quán tính của hình phẳng.

3.4. Mô men chống uốn của mặt cắt.

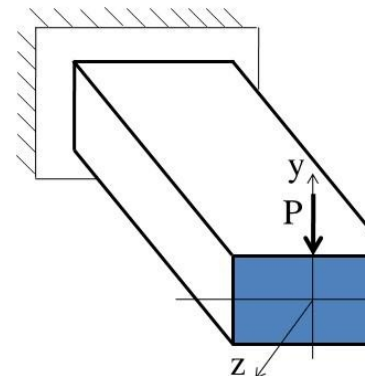
3.5. Ví dụ tính toán.

CHƯƠNG 4: ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA HÌNH PHẪNG

3.1. Khái niệm



Hình a



Hình b

* Xét khả năng chịu uốn ở hai trường hợp, ta thấy trường hợp a có khả năng chịu lực lớn hơn.

CHƯƠNG 4: ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA HÌNH PHẪNG

3.1. Khái niệm

Thanh chịu nén - kéo ➡ Tiết diện A (cm^2, m^2)

Thanh chịu uốn, xoắn ➡ Tiết diện A (cm^2, m^2)

Momen tĩnh (S)

Momen quán tính (I)

Momen chống uốn (W)

Hình dáng

Phương tác dụng

Đặc trưng khác như :

CHƯƠNG 4: ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA HÌNH PHẪNG

3.1. Khái niệm

* Đặc trưng hình học của hình phẳng là: những đặc trưng hình học làm ảnh hưởng đến khả năng chịu lực của kết cấu.

* Hiểu biết các đặc trưng hình học cho phép ta tính toán bền, độ cứng và độ ổn định của thanh, giúp ta thiết kế diện thanh hợp lý, kinh tế và thẩm mỹ.

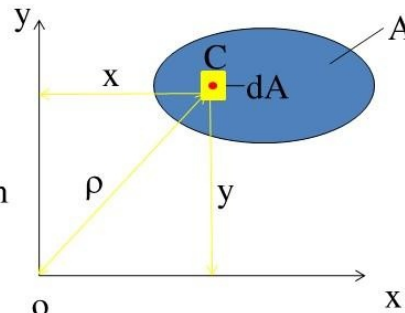
Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.2. Mô men tĩnh của hình phẳng (S)

- Với 1 điểm $C(x,y)$ bất kỳ trên mặt phẳng.
- Xung quanh điểm C lấy 1 vi phân diện tích dA

$$S_x = \int_A y dA \quad (1)$$

$$S_y = \int_A x dA \quad (2)$$



Trong đó:

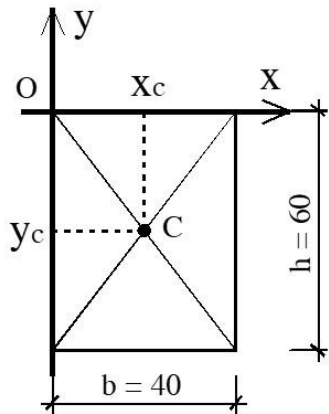
- S_x, S_y : mô men tĩnh của hình phẳng có diện tích A đối trục ox, oy (m^3)
- y, x : tọa độ của phân tố đến các trục tọa độ ox, oy .
- dA : Phân tố diện tích, A : (m^2),

* Mô men tĩnh của hình phẳng có thể có dấu (+) hoặc (-) tùy thuộc dấu của tọa độ x, y

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

Ví dụ:

Tính momen tĩnh S_x, S_y của hình phẳng sau đối với trục x, y .



- Chọn hệ trục tọa độ Oxy ban đầu như hình.
- Tính diện tích $A = b \cdot h = 4 \cdot 6 = 24$ (cm^2).
- Xác định trọng tâm C của hình rồi suy ra tọa độ trọng tâm đối với hệ trục Oxy.
- Ta có: $C(x_c, y_c) = (2, -3)$
- Tính: $S_x = y_c \cdot A = -3 \cdot 24 = -72$ (cm^3)
- $S_y = x_c \cdot A = 2 \cdot 24 = 48$ (cm^3)

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.2. Mô men tĩnh của hình phẳng (S)

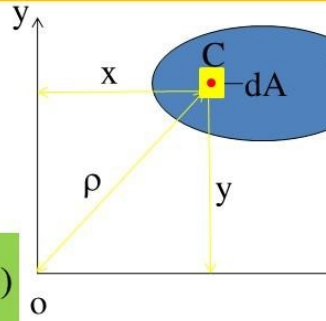
- Nếu $C(x_c, y_c)$ là trọng tâm mặt cắt có diện tích A.
- Công thức xác định trọng tâm mặt cắt.

$$S_x = \int_A y dA = y_c A \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow y_c = \frac{S_x}{A} \quad (3)$$

$$S_y = \int_A x dA = x_c A \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow x_c = \frac{S_y}{A} \quad (4)$$



$\int_A dA = A$ Là tích phân toàn diện tích hình phẳng.

- Trục trung tâm là trục có moment tĩnh của diện tích A với trục đó bằng 0 ($S_x = S_y = 0$). Trọng tâm là giao điểm của 2 trục trung tâm.
- => Moment tĩnh đối với trục đi qua trọng tâm thì bằng không.

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.2. Mô men tĩnh của hình phẳng

Trường hợp hình phẳng bất kỳ:

$$S_x = S_x^1 + S_x^2 + \dots + S_x^n$$

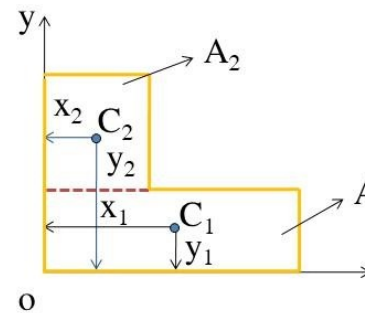
$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_n \cdot y_n$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i y_i \quad (5)$$

$$S_y = S_y^1 + S_y^2 + \dots + S_y^n$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i x_i \quad (6)$$



Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.2. Mô men tĩnh của hình phẳng

Trường hợp hình phức tạp

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i \quad (5)$$

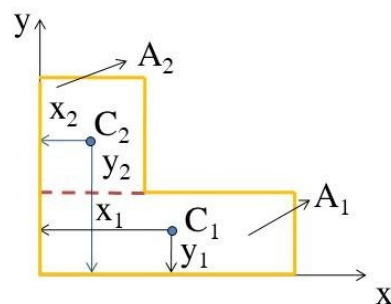
$$y_c = \frac{S_x}{A} \quad (3)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (7)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i \quad (6)$$

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad (4)$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (8)$$



Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.2. Mô men tĩnh của hình phẳng

- Trọng tâm hình trụ thẳng đứng là trung điểm của đoạn nối tâm hai đáy.
- Trọng tâm hình vành khăn là tâm hình vành khăn.
- Trọng tâm hình tam giác ABC nằm trên đường cao cách 1/3 từ đáy hoặc là giao điểm của 2 đường trung tuyến.
- **Hệ trục trung tâm:** Là hệ trục đi qua trọng tâm C của hình phẳng, có mô men tĩnh của hình phẳng đối với mỗi trục bất kỳ đều bằng 0. $S_x = S_y = 0$
- **Moment tĩnh của hình phức tạp bằng tổng moment tĩnh của hình đơn giản**

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.2. Mô men tĩnh của hình phẳng

* x_C, y_C có thể dương hoặc âm.

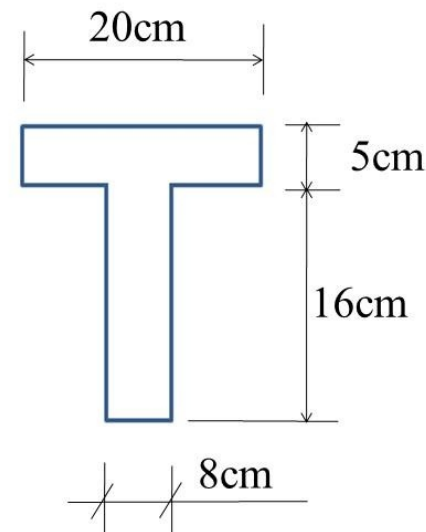
Nếu mặt cắt có trục đối xứng thì trọng tâm của nó sẽ nằm trên trục đối xứng vì moment tĩnh đối với trục bằng 0.

Nhận xét:

- Trọng tâm đoạn thẳng đồng chất ở chính giữa đoạn thẳng đó.
- Trọng tâm đường tròn, elip, đa giác đều ở tâm hình học.
- Trọng tâm hình bình hành, chữ nhật, hình thoi, hình vuông là giao điểm của các đường chéo.
- Trọng tâm hình cầu là tâm điểm của nó.
- Trọng tâm hình hộp, lăng trụ là giao điểm của các đường chéo.

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

Ví dụ 2: Xác định tọa độ trọng tâm và hệ trục trung tâm cho mặt cắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ.



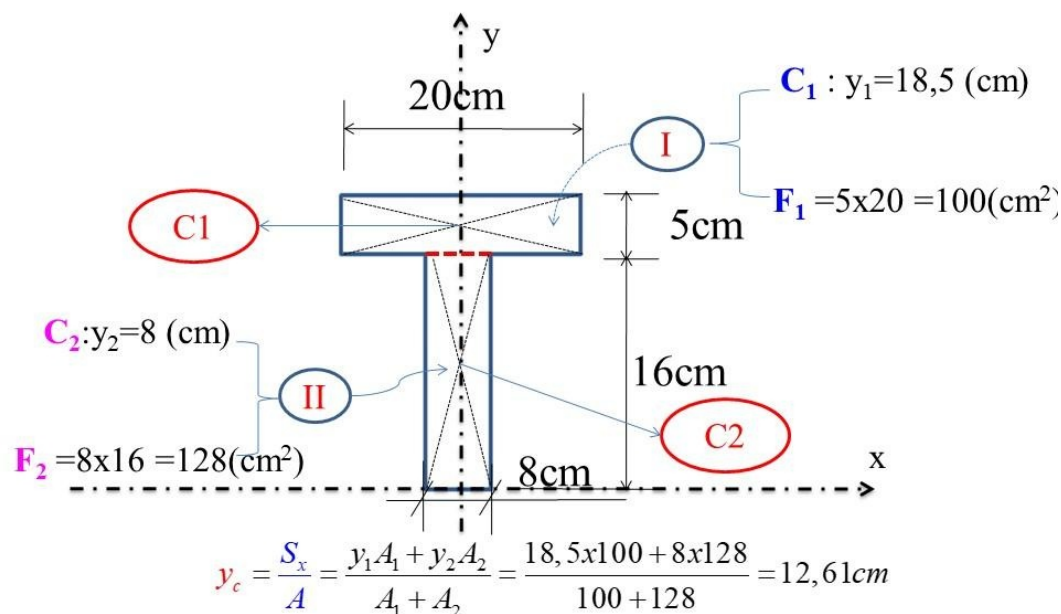
•**Bước 1:**- Chọn hệ trục tọa độ gốc đầu Oxy.

Nhận xét: Hình chữ T là hình phức tạp nên chia thành 2 hình đơn giản để tính.

-Nhận thấy T đối xứng $\Rightarrow$ Chọn trục đối xứng $\equiv$ Oy

$\Rightarrow$ Trọng tâm C $\in$ trục y

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng



Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

Bước 2: Xác định tọa độ trọng tâm và diện tích của từng hình đơn giản

- Hình 1: $C_1(x_c^1, y_c^1) = (0; 18,5) \text{ cm}$

$A_1 = 5 \times 20 = 100 \text{ (cm}^2\text{)}$

- Hình 2: $C_2(x_c^2, y_c^2) = (0; 8) \text{ cm}$

$A_2 = 16 \times 8 = 128 \text{ (cm}^2\text{)}$

Bước 3: Tính mômen tĩnh của từng hình đơn giản

Hình 1:

$S_{x1} = y_{C1} \cdot A_1 = 18,5 \cdot 100 = 1850 \text{ (cm}^3\text{)}$

$S_{y1} = x_{C1} \cdot A_1 = 0 \cdot 100 = 0$

Hình 2:

$S_{x2} = y_{C2} \cdot A_2 = 8 \cdot 128 = 1024 \text{ (cm}^3\text{)}$

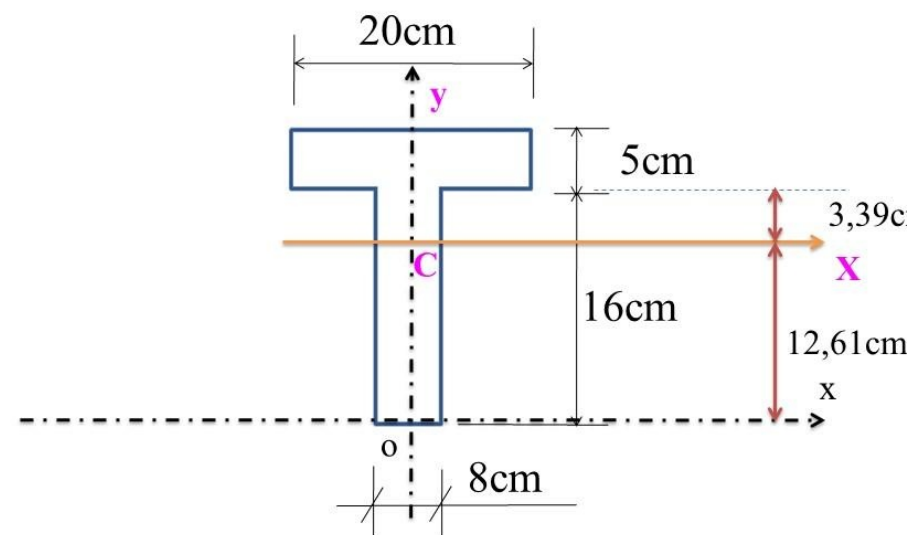
$S_{y2} = x_{C2} \cdot A_2 = 0 \cdot 128 = 0$

Bước 4: Xác định tọa độ trọng tâm cho hình phức tạp T

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 0}{100 + 128} = 0 \quad y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{A_1 + A_2} = \frac{1850 + 1024}{100 + 128} = 12,6$$

Vậy: C (0; 12,6), XCY là hệ trục trung tâm của hình phẳng T.

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng



Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.3. Mô men quán tính của hình phẳng

a. Mô men quán tính:

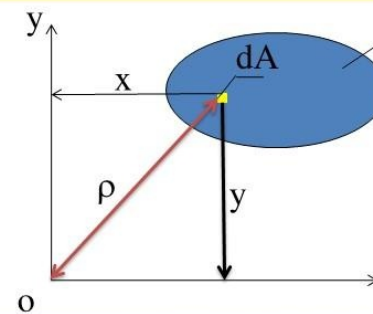
$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (9)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (10)$$

b. Mô men quán tính ly tâm:

Momen quán tính của hình phẳng đối với 2 trục

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (11)$$



I_x, I_y : mô men quán tính của hình phẳng có diện tích A đối với trục x và trục y
 $I_x, I_y > 0$, đơn vị: m^4

I_{xy} : mô men quán tính ly tâm của hình phẳng có diện tích A đối với hệ trục Oxy
 I_{xy} có thể > 0 hoặc < 0 hoặc $= 0$, đơn vị: m^4

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

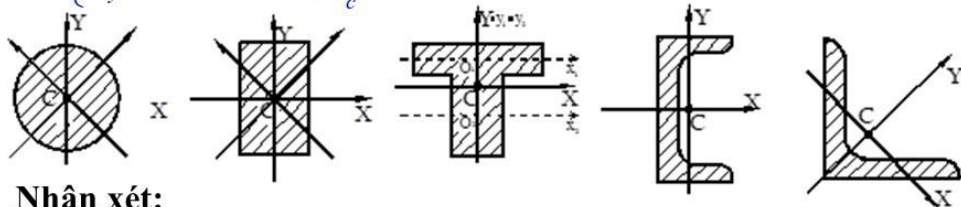
3.3. Mô men quán tính của hình phẳng:

- Hệ trục quán tính chính: là hệ trục có mô men quán tính ly tâm bằng 0. (gọi tắt là hệ trục chính)
- Theo nhận xét ta thấy nếu hình phẳng có một trục đối xứng thì hệ trục gồm trục đối xứng đó và một trục bất kỳ khác vuông góc với nó là một hệ trục chính.

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.3. Mô men quán tính của hình phẳng

- d. Hệ trục quán tính chính trung tâm $\Rightarrow$ Hệ trục quán tính chính trung tâm là hệ trục có mô men tĩnh và mô men quán tính ly tâm bằng 0.
 $\Rightarrow$ Hệ trục chính có gốc trùng với trọng tâm hình phẳng thì gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm.
- $$\begin{cases} I_{xy} = 0 \\ S_x = 0 \\ S_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_A xy dA = 0 \\ A \cdot y_c = 0 \\ A \cdot x_c = 0 \end{cases}$$



Nhận xét:

- Hình tròn có vô số hệ trục chính trung tâm.
- Hình vuông (chữ nhật) có 2 hệ trục chính trung tâm.
- Các hình khác có 1 hệ trục chính trung tâm.

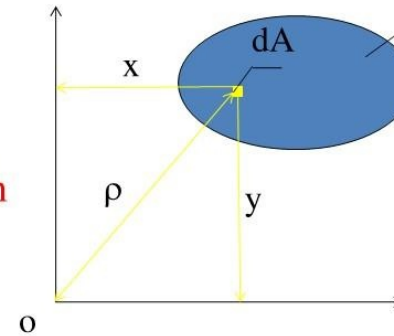
Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.3. Mô men quán tính của hình phẳng

- c. Mô men quán tính độc cực (mô men quán tính đối với một trục)

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA$$

ρ là khoảng cách từ $dA(x,y)$ đến gốc tọa độ O, với $\rho^2 = x^2 + y^2$



$$I_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y$$

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.3. Mô men quán tính của hình phẳng

- e. Mô men quán tính chính trung tâm:

Mô men quán tính của hình phẳng đối với hệ trục quán tính chính trung tâm gọi là mô men quán tính chính trung tâm

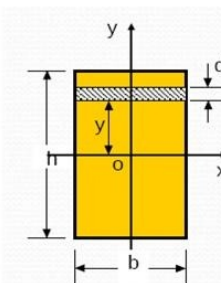
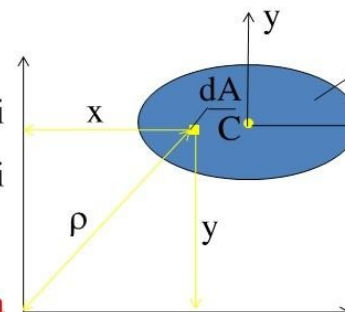
- f. Mô men quán tính chính trung tâm của một số hình đơn giản.

1. Hình chữ nhật:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

(Cạnh song song lấy mũ 1 nhân cạnh vuông góc lấy mũ 3)



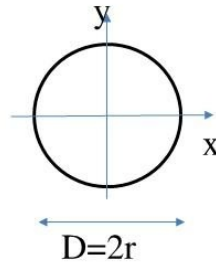
Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.3. Mô men quán tính của hình phẳng

f. Mô men quán tính chính trung tâm của một số hình đơn giản.

2. Hình tròn:

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} \approx 0,05 D^4 \quad (14)$$



$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1 D^4$$

D: đường kính của đường tròn, **r**: bán kính của đường tròn

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

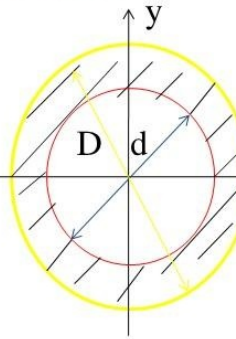
3.3. Mô men quán tính của hình phẳng

f. Mô men quán tính chính trung tâm của một số hình đơn giản.

3. Hình vành khăn:

$$I_x = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = 0,05 D^4 - 0,05 d^4 \quad (15)$$

$$I_\rho = 2I_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \quad (16)$$



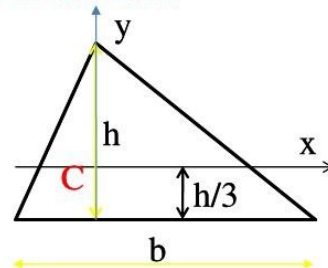
Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

4.3. Mô men quán tính của hình phẳng

f. Mô men quán tính chính trung tâm của một số hình đơn giản.

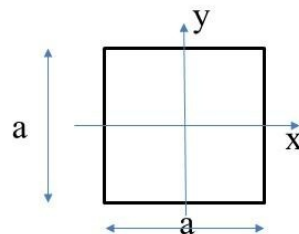
4. Hình tam giác:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}, \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$$



5. Hình vuông:

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$



Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.3. Mô men quán tính của hình phẳng

g. Công thức chuyển trục song song:

Giả sử C là trọng tâm của mặt cắt, qua C dựng hệ trục xCy song song với hệ trục XOY:

Ta có: $X = b + x$

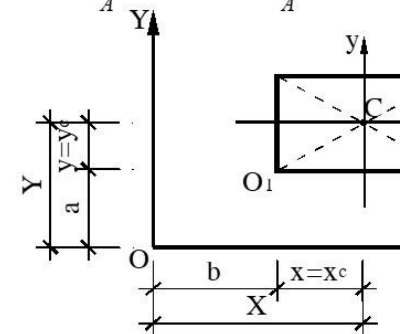
$Y = a + y$

Thay vào công thức I_x, I_y

$$I_X = \int_A y^2 \cdot dA = \int_A (a + y)^2 \cdot dA = \int_A y^2 dA + \int_A 2a \cdot y dA + \int_A a^2 dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA + 2a \cdot \int_A y dA + a^2 \int_A dA$$

$$\Rightarrow I_X = I_x + 2a \cdot S_x + a^2 \cdot A$$



Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.3. Mô men quán tính của hình phẳng

g. Công thức chuyển trục song song:

Tương tự:

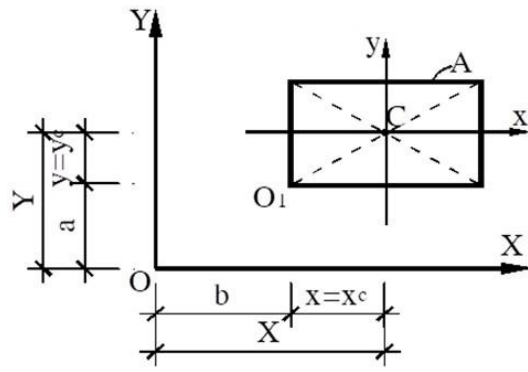
$$I_Y = I_y + 2b.S_y + b^2.A$$

Trường hợp trục x, y là trục trung tâm thì $S_x=0, S_y=0$, ta có:

$$I_X = I_x + a^2.A$$

$$I_Y = I_y + b^2.A$$

$$I_{XY} = I_{xy} + a.b.A$$



Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.4. Bán kính quán tính

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

i_x, i_y : bán kính quán tính của hình phẳng đối với trục ox và trục oy (cm).

I_x, I_y : Mô men quán tính của hình phẳng đối với ox, oy (cm⁴)

A : diện tích của hình (cm²)

♦ Mặt cắt hình chữ nhật:

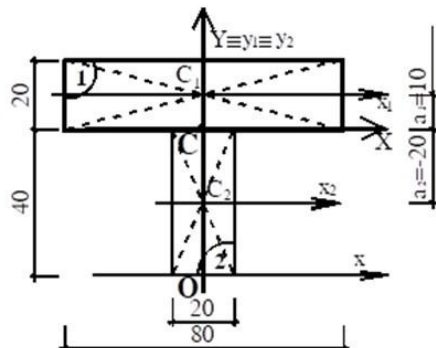
$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,289h \quad i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0,289b$$

♦ Mặt cắt hình tròn:

$$i_x = i_y = \frac{D}{4}$$

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

Ví dụ 3: Tính các mômen quán tính chính trung tâm cho mặt cắt có hình dáng và kích thước như hình vẽ.



Bước 1:- Chọn hệ trục tọa độ ban đầu Oxy.

Nhận xét: Hình chữ T là hình phức tạp nên chia thành 2 hình đơn giản để tính.

Hình chữ T đối xứng qua trục $y \Rightarrow$ Chọn trục đối xứng $\equiv Oy$

$\Rightarrow$ Trọng tâm $C \in$ trục $y \Rightarrow x_C = 0$

$\Rightarrow$ Ta đặt $x_1C_1y_1$ là hệ trục trung tâm của hình 1, $x_2C_2y_2$ là hệ trục trung tâm của hình 2.

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

Bước 2: Xác định tọa độ trọng tâm của 2 hình đơn giản.

Hình 1: $C_1(x_{c1}, y_{c1}) = (0; 5)$

$A_1 = 2.8 = 16$ (cm²)

Hình 2: $C_2(x_{c2}, y_{c2}) = (0; 2)$

$A_2 = 2.4 = 8$ (cm²)

Bước 3: Xác định tọa độ trọng tâm C của hình chữ T.

$$y_C = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{A_1 + A_2} = \frac{y_1.A_1 + y_2.A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(5.16) + (2.8)}{16 + 8} = 4 \text{ cm}$$

Vậy: C (0,4) là trọng tâm của hình phẳng, XCY là hệ trục trung tâm của hình phẳng.

Bước 4: Xác định mômen quán tính chính trung tâm là XCY:

$$\begin{cases} I_X = I_{x1} + I_{x2} \\ I_Y = I_{y1} + I_{y2} \end{cases}$$

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

* Tính I_x : Do tất cả các trục x không trùng nhau $\Rightarrow$ Áp dụng công thức chuyển trục

$$I_{x_1} = I_{x_1} + a_1^2 \cdot A_1 = \frac{8 \cdot 2^3}{12} + 1^2 \cdot 2.8 = 21,3 (cm^4)$$

$$I_{x_2} = I_{x_2} + a_2^2 \cdot A_2 = \frac{2 \cdot 4^3}{12} + (-2)^2 \cdot 2.4 = 42,6 (cm^4)$$

Tính I_y : Do tất cả các trục y trùng nhau $\Rightarrow$ Không cần áp dụng công thức chuyển trục

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = I_{y_1} + I_{y_2} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} + \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 88 (cm^4)$$

Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.5. Mô đun chống uốn của mặt cắt

c. Hình vành khăn

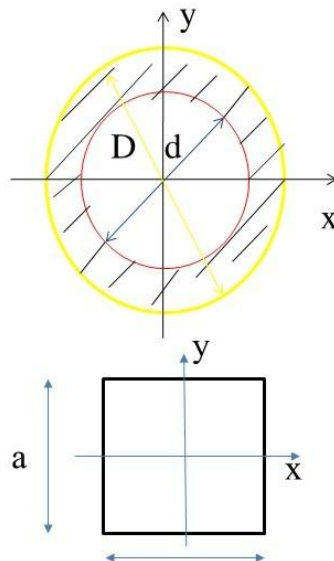
$$W_x = 0,1 \cdot (D^3 - d^3) \quad (cm^3)$$

$$W_x = 0,1 \cdot D^3 (1 - \eta^4) \quad (cm^3)$$

$$\eta = \frac{d}{D}$$

d. Hình vuông

$$W_x = \frac{a^3}{6} \quad (cm^3)$$



Chương 4: Đặc Trưng Hình Học Của Hình Phẳng

3.5. Mô đun chống uốn của mặt cắt

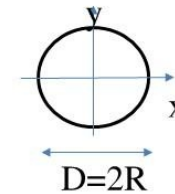
$$W_x = \frac{I_x}{Y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{I_y}{X_{\max}}$$

W_x, W_y : mômen chống uốn đối với trục x, trục y (cm^3)
 I_x, I_y : mômen quán tính của mặt cắt A đối với trục x và y (cm^4)
 $X_{\max}, Y_{\max}$: khoảng cách từ những điểm xa nhất về 2 phía của mặt cắt đối với trục x và y.

a. Hình tròn

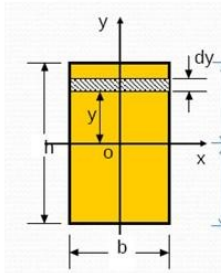
$$W_x = W_y = 0,1 D^3$$



b. Hình chữ nhật:

$$W_x = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$



Ví dụ: xác định hệ trục quán tính chính trung tâm và mô men quán tính trung tâm của mặt cắt như hình bên

